

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală, 28.februarie.2015

CLASA a VIII-a

**Subiectul I**

Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  știind că

$$\left[ \sqrt{\sqrt{x^2 + 4} + x} + \sqrt{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right] = 2,$$

unde cu  $[x]$  se notează partea întreagă a numărului  $x$ .

**Subiectul II**

Determinați valorile întregi ale lui  $x$  și  $y$  astfel încât

$$x - 3y + 4 = 0 \quad \text{și} \quad \sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}$$

**Subiectul III**

Fie  $ABCAA' B' C'$  o prismă triunghiulară regulată în care  $AB=a$ ,  $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ ,  $R$  centrul feței  $ACC' A'$ .

- Determinați distanța de la  $R$  la  $AB$ .
- Dacă  $M$  este mijlocul lui  $[AB]$  iar  $Q \in [MC']$  astfel încât  $MQ = \frac{1}{3} MC'$ , calculați  $RQ$ .
- Demonstrați că planele  $(ABC')$  și  $(BCA')$  sunt perpendiculare.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală, 28.februarie.2015

CLASA a VII-a

**Subiectul I**

- Fie  $x = \frac{6}{1} + \frac{11}{2} + \frac{16}{3} + \dots + \frac{10076}{2015} - (1 + 2^{-1} + 3^{-1} + \dots + 2015^{-1})$ . Calculați  $\left(2014 - \frac{x}{5}\right)^{-2015}$ .
- Aflați numerele întregi  $x, y, z$  știind că  $x^2 - x + |y - 3| + (z^2 - 16)^2 \leq 0$ .

**Subiectul II**

Fie  $n$  un număr natural cu proprietatea că prima zecimală a numărului  $\sqrt{n}$  este 2.

- Dați două exemple numerice de astfel de numere.
- Arătați că există o infinitate de numere naturale cu această proprietate.

**Subiectul III**

În paralelogramul  $ABCD$  notăm cu  $M$  mijlocul lui  $AB$ ,  $N$  mijlocul lui  $CM$ ,  $DN \cap BC = \{P\}$  și  $DN \cap AB = \{Q\}$ .  
Demonstrați că triunghiurile  $NCP$  și  $PBQ$  au aceeași arie.

Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect se notează cu 7 puncte

|          | BAREM CLASA a VII-a   |                |
|----------|---|----------------|
| Sub. I   | a) $x = 5 + 1 + 5 + \frac{1}{2} + 5 + \frac{1}{3} + \dots + 5 + \frac{1}{2015} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) = 5 \cdot 2015$  | 1 p            |
|          | $\left(2014 - \frac{x}{5}\right)^{-2015} = (-1)^{-2015} = -1$   | 1 p            |
|          | b) Oricare x,y,z numere întregi   |                |
|          | $x^2 - x \geq 0$<br>$ y - 3  \geq 0$<br>$(z^2 - 16)^2 \geq 0$   | 2p             |
|          | Deci, $x^2 - x +  y - 3  + (z^2 - 16)^2 = 0$<br>Egalitatea are loc dacă $x^2 - x = 0,  y - 3  = 0, (z^2 - 16)^2 = 0$<br>Finalizare, soluțiile sunt (0,3,4),(0,3,-4),(1,3,4),(1,3,-4)  | 1p<br>1p<br>1p |
| Sub. II  | a) Oricare două numere cu proprietatea cerută.(Ex: 5,28,39,52,53,...)   | 1p             |
|          | b) Pentru n număr cu proprietatea respectivă, fie $k = [\sqrt{n}]$ ,<br>$0,2 \leq \{\sqrt{n}\} < 0,3 \Rightarrow 0,2 + k \leq \sqrt{n} < 0,3 + k$ . Ridicând relația la pătrat se obține $(0,2 + k)^2 \leq n < (0,3 + k)^2$ . | 2 p            |
|          | Există cel puțin un astfel de număr natural n, dacă $(0,3 + k)^2 - (0,2 + k)^2 > 1 \Leftrightarrow 0,1 \cdot (2k + 0,5) > 1 \Rightarrow k > 4,75$ .   | 2 p            |
|          | Deci pentru $k \geq 5$ există cel puțin un n cu proprietatea dată $\Rightarrow$ număr infinit de numere.<br>$k=5 \Rightarrow n=28, k=6 \Rightarrow n=39, k=7 \Rightarrow n=52$ sau 53   | 2p             |
| Sub. III | (ULU) $\triangle CDN \cong \triangle MNQ$ .   | 2 p            |
|          | Deci DC=MQ reiese apoi că B este mijlocul lui [MQ], deci aria $\triangle MNB$ este aceeași cu aria $\triangle NBQ$ .  | 2+1 p          |
|          | Dar [BN] mediană în $\triangle MBC$ deci aria $\triangle MNB$ este aceeași cu aria $\triangle NBC$ .  | 1p             |
|          | Finalizare. (Se scade aria $\triangle BNP$ )  | 1p             |

|          | BAREM CLASA a VIII-a   |          |
|----------|--|----------|
| Sub. I   | $2 \leq \sqrt{\sqrt{x^2 + 4} + x} + \sqrt{\sqrt{x^2 + 4} - x} < 3$   | 1 p      |
|          | Aplicare binom la pătrat, produsul sumei cu diferența  | 2+2 p    |
|          | Finalizare, $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$   | 2p       |
| Sub. II  | $x + 4 = 3y$   | 1p       |
|          | $x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 = (x + 4)^2 + 7y^2 + 8y - 12 = 16y^2 + 8y - 12 = (4y + 1)^2 - 13$  | 2p       |
|          | $\sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}$ dacă $(4y + 1)^2 - 13 = k^2, k \in \mathbb{Q}$  | 2p       |
|          | $(4y + 1 + k)(4y + 1 - k) = 13$<br>Analizând cazurile posibile, soluția este $x=-10, y=-2$   | 2p       |
| Sub. III | Fie N mijlocul lui [BC], P mijlocul lui [AC].  |          |
|          | a) Fie $PS \perp AB$ . Din Th celor trei perpendiculare $d(R;AB)=RS$ .   | 1p       |
|          | $RS = \frac{3a}{4}$  | 1p       |
|          | b) Q= centrul de greutate al $\triangle ABC$   |          |
|          | $RQ = \frac{1}{3} RB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$  | 1p       |
|          | c) Fie $MT \perp RB$ , dem. că unghiul între cele două plane este $\widehat{MTN}$ .<br>Se verifică reciproca Th. Pitagora în $\triangle MNT$ , finalizare. | 2p<br>1p |